Nachhilfestunde 5

$$f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+16}$$

Untersuchung einer speziellen gebrochen rationalen Funktionen mit Anwendungsaufgabe.

Niveau: Leistungskurs Gymnasium

Datei Nr. 43205

Stand 29. April 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

VORWORT

In 10 Schritten werden wird eine spezielle Funktion untersucht.
Diese wird dann mit einer Anwendung verknüpft. Dazu kommt eine schwere Integrationsaufgabe für Fortgeschrittene. Dabei wird eine vermutlich unbekannte Integralformel eingesetzt und deren Anwendung ausführlich erklärt. Dies führt zur Funktion Arcustangens.

Mit $\boxed{\text{GW}}$ kennzeichne ich „Grundwissen"

Um diese Themen geht es:

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ Wir beginnen mit der Untersuchung von $f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+16}$

$\boxed{3}$ Berechnung von Extrem- und Wendepunkten.

$\boxed{4}$ bis $\boxed{7}$ Tangente als Sichtlinie zum tiefsten Punkt der Talkurve.

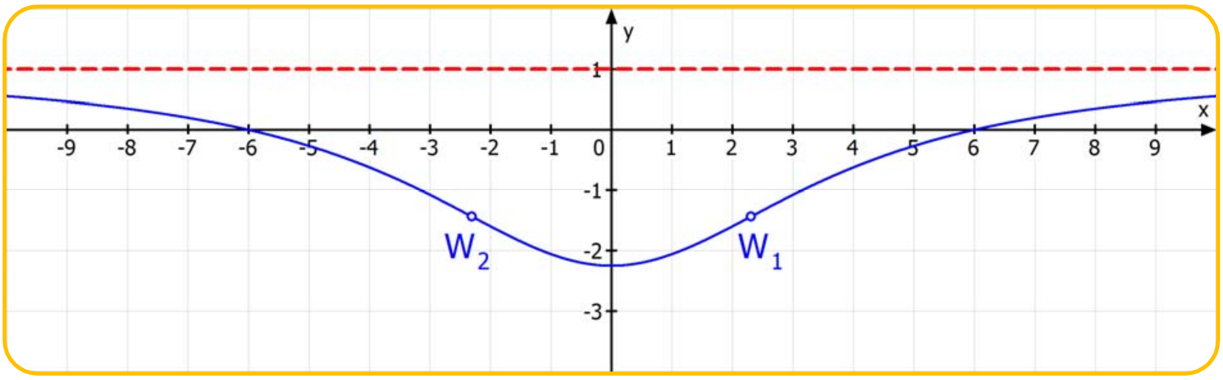
$\boxed{8}$ bis $\boxed{10}$ Flächeninhalte berechnen mit $\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx=\left[\arctan x\right]_a^b$

Auf der nächsten Seite beginnt der 1. Abschnitt unserer Stunde.

$\boxed{1}$ Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+16}$, $x\in\mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.

Wir beginnen damit, die Grundeigenschaften von f zu bestimmen.

Ich zeige das Schaubild von f:



Deine Aufgabe ist zu Beginn ganz einfach: Berechne

Nullstellen, Polstellen, Hebbare Lücken, Asymptoten, Symmetrie.

Im Anschluss dann Extrem- und Wendepunkte.

$\Rightarrow$ $\boxed{2}$

$\boxed{2}$ Gegeben ist $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 + 16}$.

Vorarbeit: $Z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 6$

$N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -16$

Spätestens hier muss man erkennen, dass der Nenner nicht Null wird.

Auswertung: Nullstellen: $(Z = 0 \text{ und } N \neq 0) \qquad x_{1,2} = \pm 6$

Polstellen und Hebbare Lücken gibt es keine, weil der Nenner nicht Null wird.

Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Keine senkrechten Asymptoten.

Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 + 16} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{36}{x^2}}{1 + \frac{16}{x^2}} = \frac{1 - \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{36}{x^2}}{1 + \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{16}{x^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Daher ist y = 1 die waagrechte Asymptote.

Nun noch das Symmetrieverhalten:

1. Möglichkeit: **K ist symmetrisch zur y-Achse, denn** $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 36}{(-x)^2 + 16} = \frac{x^2 - 36}{x^2 + 16} = f(x)$

2. Möglichkeit: **K ist symmetrisch zur y-Achse, denn** f(x) enthält nur gerade x-Potenzen.

Die nächsten Untersuchungen:

Bestimme Extrem- und Wendepunkte.

$\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{3}$ Gegeben ist $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 + 16}$

1. Ableitung mit der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + 16) - 2x \cdot (x^2 - 36)}{(x^2 + 16)^2} = \frac{2x^3 + 32x - 2x^3 + 72x}{(x^2 + 16)^2} = \frac{104x}{(x^2 + 16)^2}$$

Zur Berechnung der 2. Ableitung zieht man den konstanten Faktor vor den Bruch:

$$f'(x) = 104 \cdot \frac{x}{(x^2 + 16)^2}$$

2. Ableitung:

$$f''(x) = 104 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 16)^{\cancel{2}} - 2 \cdot \cancel{(x^2 + 16)} \cdot 2x \cdot x}{(x^2 + 16)^{\cancel{4}\,3}} = 104 \cdot \frac{x^2 + 16 - 4x^2}{(x^2 + 16)^3}$$

$$f''(x) = 104 \cdot \frac{16 - 3x^2}{(x^2 + 16)^3}$$

Berechnung der Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = 0$

Hinreichende Bedingung: $f''(0) = 104 \cdot \frac{16}{16^3} > 0 \quad \Rightarrow$ Tiefpunkt $T\left(0 \,|\, -\frac{9}{4}\right)$

Berechnung der Wendepunkte:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$16 - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \tfrac{16}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_W = \pm\sqrt{\tfrac{16}{3}} \quad \left(= \pm\sqrt{\tfrac{16 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \pm\tfrac{4}{3}\sqrt{3} \approx \pm 2{,}31 \right)$$

Hinreichende Bedingung: Da diese quadratische Gleichung genau 2 Nullstellen hat, sind es <u>einfache</u> Nullstellen. Das bedeutet Vorzeichenwechsel (für $f''(x)$). Damit ist ohne eine dritte Ableitung gesichert, dass $x_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{16}{3}}$ tatsächlich Wendestellen sind.

y-Koordinaten:

$$f\left(\pm\sqrt{\tfrac{16}{3}}\right) = \frac{\frac{16}{3} - 36}{\frac{16}{3} + 16} \underset{\substack{\text{Kürzen} \\ \text{durch 4}}}{=} \frac{\frac{4}{3} - 9}{\frac{4}{3} + 4} \underset{\substack{\text{Erweitern} \\ \text{mit 3}}}{=} \frac{4 - 27}{4 + 12} = -\frac{23}{16} \approx -1{,}44$$

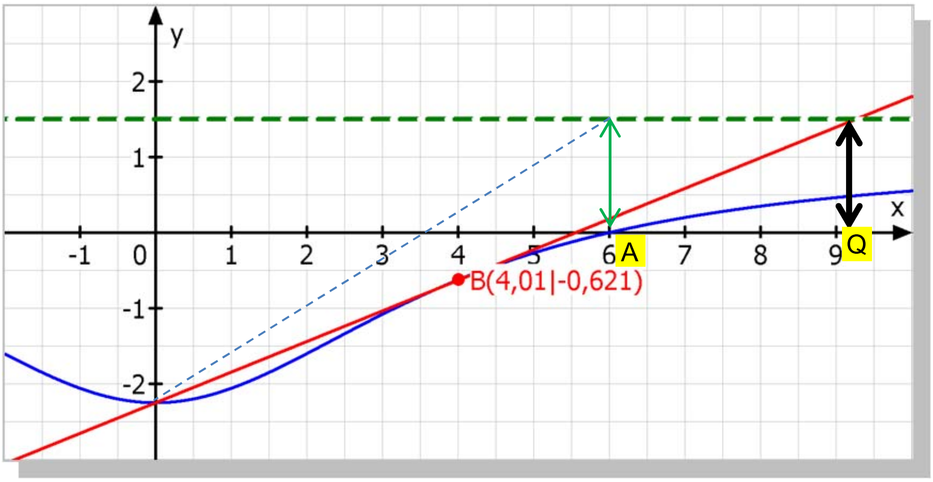
$\boxed{4}$ **Anwendungsaufgabe**

K stellt für $-6 \le x \le 6$ den Querschnitt eines 500 m langen Kanals dar (x und f(x) in Meter).
Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe y = 0. Auf der Landfläche steht eine Person mit der Augenhöhe 1,50 m und blickt in Richtung des tiefsten Punktes des Kanals.
Wie weit kann er sich vom Rand des Kanals entfernen, wenn er diesen Tiefpunkt noch sehen will?

$\Rightarrow \boxed{5}$

$\boxed{5}$ So etwa muss man sich die Situation vorstellen:

Wenn die Person in A am Rand des Kanals steht, also bei x = 6 m, dann sieht sie ungehindert den Tiefpunkt. Bewegt sie sich in Richtung x-Achse weg nach Q, wird die Sicht auf den Tiefpunkt durch die Krümmung des Tals nicht eingeschränkt. Kurz nach x = 9 m wird die Sichtlinie zur Tangente, welche den Hang in einem Berührpunkt B streift. Weiter nach rechts berührt die Sicht-Tangente den Hang weiter oben, so dass diese nicht mehr den Tiefpunkt erreicht.



Die Aufgabe, die zu lösen ist, heißt mathematisch formuliert:

Lege vom Tiefpunkt T aus eine Tangente an die Randkurve K und bestimme den Berührpunkt B. Schneide dann diese Tangente mit der Geraden y = 1,5.

Dies ist eine Grundaufgabe für Tangenten, die man mit dieser Methode lösen kann:

$\boxed{GA}$

Man nimmt einen beliebigen Punkt von K als Berührpunkt und stellt die zugehörige Tangentengleichung auf. Dann stellt man die Bedingung, dass diese Tangente durch den Tiefpunkt gehen soll. Dann schneidet man Tangente und Gerade y = 1,5.

$\Rightarrow \boxed{6}$

$\boxed{6}$ Hier die Musterlösung dieser Tangentenaufgabe.

Gegeben ist $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16}$ mit $f'(x) = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$

Wähle einen beliebigen Kurvenpunkt von K: $B(u \mid f(u))$ mit u > 0.

Tangentengleichung (Punkt-Steigungsform): $y - y_B = m_T(x - x_B)$

Die Tangentensteigung in B ist $m_T = f'(u)$

Tangente: $y - f(u) = f'(u)(x-u)$

T: $y - \frac{u^2-36}{u^2+16} = \frac{104u}{(u^2+16)^2}(x-u)$

Bedingung: T muss durch den Tiefpunkt $\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right)$ gehen:

$$\boxed{-\frac{9}{4}} - \frac{u^2-36}{u^2+16} = \frac{104u}{(u^2+16)^2}\cdot\left(\boxed{0}-u\right)$$

$$-\frac{9}{4} - \frac{u^2-36}{u^2+16} = -\frac{104u^2}{(u^2+16)^2} \quad | \cdot (u^2+16)^2$$

$$-\frac{9}{4}(u^2+16)^2 - \frac{u^2-36}{\cancel{u^2+16}}(u^2+16)^{\cancel{2}} = -\frac{104u^2}{\cancel{(u^2+16)^2}}\cancel{(u^2+16)^2}$$

$$-\tfrac{9}{4}\cdot\left(u^4+32u^2+256\right) - \left(u^4+16u^2-36u^2-4\cdot36\cdot16\right) = -104\,u^2 \quad | \cdot 4$$

$$-9u^4 - 288u^2 - \cancel{2304} - 4u^4 + 80u^2 + \cancel{2304} = -416\,u^2$$

$$-13u^4 + 208u^2 = 0 \qquad | :(-13)$$

$$u^4 - 16u^2 = 0$$

$$u^2(u^2-16) = 0 \qquad \text{Nullprodukt}$$

1. Lösung: $u_1 = 0$ (scheidet aus)

2. und 3. Lösung: $u^2 = 16$ also $u_{2,3} = \pm 4$.

Zu $u_2 = 4$ gehört: $f(4) = \frac{16-36}{16+16} = \frac{-20}{32} = -\frac{5}{8}$

und: $f'(4) = \frac{104\cdot4}{(16+16)^2} = \frac{416}{32^2} = \frac{13}{32}$

Die Sichtlinie T hat dann diese Gleichung:

$y + \frac{5}{8} = \frac{13}{32}\cdot(x-4)$ d. h. $y = \frac{13}{32}x - \frac{13}{8} - \frac{5}{8}$ bzw. $y = \frac{13}{32}x - \frac{9}{4}$

Bestimme nun den Standort Q der Person.

$\Rightarrow \boxed{7}$

$\boxed{7}$ Standpunkt der Person:

Schnitt der Tangente mit der Geraden $y = \frac{3}{2}$ (Augenhöhe)

$$\frac{13}{32}x - \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{13}{32}x = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}$$

$$\frac{13}{32}x = \frac{15}{4}$$

$$x_Q = \frac{15}{4} \cdot \frac{32}{13} = \frac{120}{13} \approx 9{,}23$$

Abstand vom Ufer: $d = 9{,}23 - 6 = 3{,}23\ (m)$.

$\boxed{8}$ Nun wird der Kanal bis zum Rand (bei x = 6) mit Wasser gefüllt.

Welche Querschnittsfläche F hat er?

Das ist eine Aufgabe für Fortgeschrittene

Ansatz:

$$F = -2\int_0^6 f(x)\,dx = -2\int_0^6 \frac{x^2-36}{x^2+16}\,dx$$

Die Fläche liegt unterhalb der x-Achse, daher das Minuszeichen vor dem Integral!

Hilfe: In Tabellen für Integrale findet man diese Formel: $\boxed{\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\arctan x]_a^b}$

arctan ist die Umkehrfunktion der Tangensfunktion und heißt Arcustangens:

$g(x) = \arctan(x)$ hat die Ableitung: $g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ Daher ist

Anleitung:

Zeige zuerst, dass $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16} = 1 - \frac{52}{x^2+16}$ ist.

Dann kürzt man den Bruch durch 16 und vereinfacht durch eine Substitution.

$\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{9}$ Zuerst zerlegt man den Bruch $f(x) = \dfrac{x^2-36}{x^2+16}$

Die 1. Möglichkeit ist dieser Umformungstrick:

$$f(x) = \frac{x^2-36}{x^2+16} = \frac{x^2+\boxed{16}-16-36}{x^2+16} = \frac{x^2+16-52}{x^2+16} = \boxed{\frac{x^2+16}{x^2+16}} - \frac{52}{x^2+16} = 1-\frac{52}{x^2+16}$$

Die 2. Möglichkeit ist Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (x^2-36):(x^2+16)=1 \\ \underline{-(x^2+16)} \\ \quad -52 \end{array} \qquad \Rightarrow \quad f(x) = 1-\frac{52}{x^2+16}$$

Damit kann man das gesuchte Integral umformen:

$$F = -2\int_0^6 \frac{x^2-36}{x^2+16}dx = -2\int_0^6 \left(1-\frac{52}{x^2+16}\right)dx = \underbrace{-2\int_0^6 dx}_{F_1} + \underbrace{2\int_0^6 \frac{52}{x^2+16}dx}_{F_2} \qquad (+)$$

1. Teilintegral: $F_1 = -2\int_0^6 dx = -2\cdot[x]_0^6 = -12$

2. Teilintegral: $F_2 = 2\int_0^6 \frac{52}{x^2+16}dx$

Umformungs-Ziel ist das Grundintegral $\boxed{\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan(x)]_a^b}$

Man muss also den Bruch zuerst durch 16 kürzen, damit man im Nenner +1 erhält:

$$= 2\int_0^6 \frac{52}{x^2+16}dx = 2\int_0^6 \frac{52\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}x^2+1}dx = \frac{13}{2}\int_0^6 \frac{1}{\frac{1}{16}x^2+1}dx$$

Dann vereinfacht man mit einer Substitution: $z = \frac{1}{4}x \Rightarrow dz = \frac{1}{4}\cdot dx \Rightarrow \boxed{dx} = \boxed{4\cdot dz}$

Umrechnung der Grenzen: $x=0 \Rightarrow z=0,\ x=6 \Rightarrow z=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Damit erhält man:

$$= \frac{13}{2}\cdot\int_0^{3/2}\frac{1}{z^2+1}\boxed{4\cdot dz} = 26\cdot\int_0^{3/2}\frac{1}{z^2+1}dz = [26\cdot\arctan(z)]_0^{3/2}$$

$$= 26\cdot\left[\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right)-\arctan(0)\right] = 26\cdot\arctan\left(\tfrac{3}{2}\right) \approx 25{,}55$$

Zusammengesetzt in (+): $F = F_1 + F_2 = -12 + 25{,}55 = 13{,}55$.

Zusatzfrage:

Der Kanal ist 500 m lang. Welche Wassermenge kann er maximal aufnehmen?

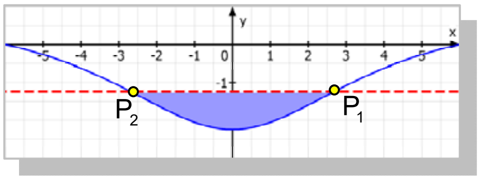
$\Rightarrow \boxed{10}$

$\boxed{10}$ Die einfache Inhaltsformel heißt:

$$V = Q \cdot L = 13{,}55\ m^2 \cdot 500\ m = 6775\ m^3 \quad \left[\approx 6800\ m^3\right]$$

Zusatzaufgabe:

Zu wie viel Prozent ist der Kanal bei einem Pegelstand von 1 m gefüllt?



Da der Tiefpunkt bei -2,25 m liegt, bedeutet Pegelstand 1 m, dass die Wasseroberfläche durch die Gerade $y = -1{,}25$ beschrieben wird.

1. Schritt: Berechnung der Schnittpunkte P_1 und P_2:

$$\frac{x^2-36}{x^2+16} = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4\left(x^2-36\right) = -5\left(x^2+16\right) \Leftrightarrow 4x^2 - 144 = -5x^2 - 80$$

$$9x^2 = 64 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{64}{9}} = \pm\tfrac{8}{3} \text{ ergibt } P_1\left(\tfrac{8}{3} \mid -\tfrac{5}{4}\right),\ P_2\left(-\tfrac{8}{3} \mid -\tfrac{5}{4}\right)$$

2. Schritt: Neue Querschnittfläche der Wassermenge:

$$F^* = 2\int_0^{8/3}\left(-\frac{5}{4} - f(x)\right)dx = 2\int_0^{8/3}\left(-\frac{5}{4} - 1 + \frac{52}{x^2+16}\right)dx = \underbrace{2\int_0^{8/3} -\frac{9}{4}dx}_{F_3} + \underbrace{2\int_0^{8/3}\frac{52}{x^2+16}dx}_{F_4}$$

1. Teilintegral: $F_3 = \frac{9}{2}\int_0^{8/3} dx = \frac{9}{2}\cdot\left[x\right]_0^{8/3} = \frac{9}{2}\cdot\frac{8}{3} = 12$

In $\boxed{10}$ wurde gezeigt: $2\int_0^{a}\frac{52}{x^2+16}dx = \left[26\cdot\arctan(z)\right]_0^{a/4}$ mit $z = \frac{1}{4}x$.

2. Teilintegral: $F_4 = -\left[26\cdot\arctan(z)\right]_0^{2/3} = 26\cdot\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

Querschnittsfläche: $F^* = -12 + 26\cdot\arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 3{,}288$

Wasservolumen: $V^* = F^* \cdot L = 1644\ m^3$.

Das sind $p = \frac{F^*}{F}\cdot 100\% = 24{,}3\%$

Ergebnis: Der Kanal ist zu 24,3% gefüllt.

Das war Leistungskursniveau.

CIAO!